

张量分析与连续介质力学

第 3 章

笛卡尔张量的坐标变换、 分解与不变量

Coordinate Transformations, Decomposition and Invariants of Cartesian Tensors

徐翱 景泽 编著

西北工业大学 极端力学研究院

本章核心问题

问题一

同一个物理张量在两套坐标系中，为什么会有不同的分量矩阵？

问题二

当分量随坐标系变化时，如何提取不依赖坐标选择的主值、主方向和标量不变量？

学习目标

知识目标

- 理解方向余弦矩阵及各阶笛卡尔张量的正交坐标变换法则
- 掌握二阶张量的对称—反对称分解、谱分解
- 掌握三个主不变量以及各向同性张量的基本表示

能力目标

- 能够构造方向余弦矩阵，完成矢量与二阶张量的分量变换
- 能够由平面应力解析变换求主方向
- 能够求解实对称张量的主值和主方向，并检验不变量

进阶目标

- 区分被动坐标变换与主动刚体旋转
- 区分坐标不变性与材料各向同性
- 区分特征向量矩阵与坐标变换矩阵

教学重点与难点

教学重点

- ✓ 方向余弦矩阵的定义与行列约定
- ✓ 二阶张量的正交变换法则 $T' = QTQ^T$
- ✓ 平面应力解析变换与主方向求解
- ✓ 实对称张量的谱分解与主值主方向
- ✓ 三个主不变量的代数定义与物理意义
- ✓ 对称—反对称分解与轴矢量对应

教学难点

- ⚠ 被动变换与主动旋转的矩阵互逆关系
- ⚠ 特征向量矩阵 V 与方向余弦矩阵 $Q = V^T$ 的行列约定
- ⚠ 双角公式 2θ 的来源：两个方向余弦因子的乘积
- ⚠ 不变量的代数定义与具体物理意义的区分
- ⚠ 张量剪应变 ε 与工程剪应变 γ 的因子 2 关系
- ⚠ 各向同性张量与材料各向同性的概念辨析

本章知识结构



工程问题导入

在航空航天和计算力学中，同一个物理问题往往需要使用多套坐标系：

地面坐标系

飞行器总体运动描述

风轴系

气动力表达与分析

机体坐标系

结构应力输出与校核

材料主轴系

复合材料本构关系建立

坐标系的改变不影响物理实体本身，但会改变其分量表示。

本章要解决的两个根本问题

- ① 给出分量在不同正交坐标系之间的变换法则
- ② 辨识在变换中保持不变的代数量（主值、主方向、不变量）

限定：三维欧几里得空间，正交归一基底，保持右手取向的纯旋转

模块一

坐标旋转与方向余弦矩阵

Coordinate Rotation and Direction Cosine Matrix

核心问题：如何用一個矩阵描述两套正交坐标系之间的关系？

新旧基底与方向余弦

3.1

设旧坐标系正交归一基底：

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$$

新坐标系正交归一基底：

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$$

方向余弦定义

$$Q_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j)$$

新基矢量在旧基底中的展开：

$$\mathbf{e}'_i = Q_{ij} \mathbf{e}_j$$

其中 Q_{ij} 是新基 $\mathbf{e}'_i$ 与旧基 $\mathbf{e}_j$ 的夹角余弦

方向余弦矩阵的行列约定

3.1

矩阵 $Q = [Q_{ij}]$ 称为方向余弦矩阵。本章统一采用以下行列约定：

第 i 行

新基矢量 e'_i 在旧基底中的分量

即 $e'_i = Q_{i1} e_1 + Q_{i2} e_2 + Q_{i3} e_3$

第 j 列

旧基矢量 e_j 在各个新轴方向上的投影

即 e_j 在新坐标系中的分量列

易错提醒

不同教材可能采用"行是旧基在新基中分量"的相反约定。使用前必须确认行列定义，否则变换公式符号相反。

矢量分量的坐标变换

3.1

对任意物理矢量 $\mathbf{v} = v_j \mathbf{e}_j$ ，其在新基底下的第 i 个分量：

$$\begin{aligned} v'_i &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i \\ &= \mathbf{v} \cdot (Q_{ij} \mathbf{e}_j) \\ &= Q_{ij} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= Q_{ij} v_j \end{aligned}$$

核心结论

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q} \mathbf{v}$$

矢量分量在被动坐标变换下左乘方向余弦矩阵 $\mathbf{Q}$

正交性与逆变换

3.1

新基底满足正交归一性 $e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij}$ ，代入展开式：

$$Q_{ik} Q_{jl} (e_k \cdot e_l) = Q_{ik} Q_{jl} \delta_{kl} = Q_{ik} Q_{jk} = \delta_{ij}$$

正交性

$$Q Q^T = \mathbf{I}$$

逆变换

$$Q^{-1} = Q^T$$

物理意义

正交矩阵的逆等于转置，因此坐标变换无需计算矩阵求逆。矢量的逆变换为 $v = Q^T v'$ 。

行列式与空间取向

3.1

任意正交矩阵满足 $\det(Q) = \pm 1$ ，两种情形对应不同的几何操作：

$\det(Q) = +1$

保持空间取向的纯旋转

右手坐标系 $\rightarrow$ 右手坐标系
本章主要采用此情形

$\det(Q) = -1$

包含镜像反射

右手坐标系 $\rightarrow$ 左手坐标系
轴矢量在此变换下需额外处理

这一限制与第二章对列维-奇维塔符号和轴矢量的说明一致。在纯旋转框架下， ε_{ijk} 作为三阶张量的变换性质保持简洁。

概念辨析：被动变换与主动旋转

3.1

被动坐标变换

物理矢量不动，坐标基底旋转

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q} \mathbf{v}$$

新基底由 $\mathbf{e}'_i = Q_{ij} \mathbf{e}_j$ 给出
同一矢量的分量满足 $\mathbf{v}' = \mathbf{Q} \mathbf{v}$

主动刚体旋转

坐标基底不动，物理矢量被旋转

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \mathbf{v}$$

主动旋转矩阵 $\mathbf{R}$ 作用于矢量本身
物体在空间中实际转动

关键关系

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$$

当"基底旋转"和"物体旋转"具有相同几何转角时，两者的矩阵互为转置（逆矩阵）

被动坐标变换：基底旋转，物理矢量不动，分量随之改变

从 +e₃ 方向观察：正转角为逆时针；图中只有一根物理矢量 v

A 同一平面中的旧基底、新基底与固定矢量

B 变换矩阵与分量关系

基底关系

$$\mathbf{e}'_i = Q_{ij} \mathbf{e}_j$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$$

Q 的“行”对应什么？

第 i 行 = 新基矢 e'_i 在旧基底 (e_1, e_2) 中的分量

e'_1	↔ (cos θ, sin θ)
e'_2	↔ (-sin θ, cos θ)

同一矢量，不同坐标列

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_i \mathbf{e}'_i$$
$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

v' = Qv 只改变分量表示，不移动物理箭头

不是主动旋转：没有 v → Rv 的第二根矢量

C 被动变换的判别线索

1 基底旋转
e_i → e'_i

2 物理矢量不动
v 只有一根

3 分量改变
(v₁, v₂) → (v'₁, v'₂)

被动坐标变换：灰色为旧基底，蓝色为新基底，红色为固定物理矢量

工程例题 3-1：平面偏航后的方向余弦矩阵

3.1

从 $+e_3$ 方向朝原点观察，新坐标系相对旧坐标系逆时针旋转角 θ 。求方向余弦矩阵并验证正交性。

计算前先判断（课堂互动）

① Q第一行应是什么？ ② $\theta=0$ 时Q退化为？ ③ $\theta=90^\circ$ 时第一行？ ④ $\det(Q)$ 应为+1还是-1？

新基矢量：

$$e'_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$$

$$e'_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$$

$$e'_3 = e_3$$

方向余弦矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

验证： $QQ^T = I$, $\det(Q) = 1$

数字赋能 03-A：构造并检验方向余弦矩阵

3.1

用 NumPy 按被动变换约定构造 Q ，检查正交性、行列式，并用速度算例验证模长不变性。

```
import numpy as np
theta = np.radians(30.0) # 逆时针旋转30°
c, s = np.cos(theta), np.sin(theta)
Q = np.array([[c, s, 0], [-s, c, 0], [0, 0, 1]])
print("orthogonal:", np.allclose(Q @ Q.T, np.eye(3)))
print("det(Q):", np.linalg.det(Q))
v = np.array([20.0, 15.0, 0.0]) # 来流速度 m/s
v_prime = Q @ v
print("norm invariant:",
      np.allclose(np.linalg.norm(v), np.linalg.norm(v_prime)))
```

预期输出

orthogonal: True | det(Q): 1.0 | norm invariant: True — 坐标旋转不改变矢量模长

模块二

笛卡尔张量的变换法则

Transformation Laws of Cartesian Tensors

核心问题：各阶张量的分量如何随坐标系变换？什么是张量性与各向同性？

各阶笛卡尔张量的变换法则

3.2

张量分量必须在正交基底变化下服从规定的变换法则：

零阶张量（标量）

$$\phi' = \phi$$

一阶张量（矢量）

$$v'_i = Q_{ij}v_j$$

二阶张量

$$T'_{ij} = Q_{ik}Q_{jl}T_{kl}$$

二阶张量矩阵形式

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T$$

正交相似变换： $\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{-1}$ （因 $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ ）

规律推广：每个自由指标对应一个方向余弦因子

$$T'_{i_1 i_2 \cdots i_r} = Q_{i_1 j_1} Q_{i_2 j_2} \cdots Q_{i_r j_r} T_{j_1 j_2 \cdots j_r}$$

高阶张量变换与四阶弹性张量

3.2

四阶张量（如线弹性本构张量）满足四个方向余弦因子的变换：

$$C'_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lq}C_{mnpq}$$

各向同性四阶弹性张量（Lamé形式）

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

代入胡克定律 $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$

$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

从柯西面力公式推导二阶变换法则

3.2

利用 $t_i = \sigma_{ij} n_j$ 在任意坐标系中形式不变，推导应力张量的变换法则。

Step 1 新旧坐标系中柯西公式： $t'_i = \sigma'_{ij} n'_j$ ，且 $t'_i = Q_{ik} t_k$ ， $n'_j = Q_{jl} n_l$

Step 2 代入： $t'_i = Q_{ik} \sigma_{kl} n_l$ ，再用逆变换 $n_l = Q_{jl} n'_j$

Step 3 合并： $t'_i = Q_{ik} \sigma_{kl} Q_{jl} n'_j$ ，与 $t'_i = \sigma'_{ij} n'_j$ 比较

核心结论

$$\sigma'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} \sigma_{kl}$$

利用 n'_j 的任意性得到应力张量变换法则

概念辨析：坐标不变性与材料客观性

3.2

本章讨论的坐标不变性

- 同一时刻、同一空间点
- 正交基底改变时的分量变换
- 标量不变量 (l_1, l_2, l_3)
- 纯代数层面的坐标无关性

连续介质中的材料客观性

- 随时间平移、转动的观测者
- 运动历史的依赖性
- 本构响应的标架无差异性
- 涉及动力学和热力学过程

二者相关，但不能简单等同。本章建立的是进一步学习标架无差异性所需的代数基础。

张量商律 (进阶)

3.2

商律用于从一个对任意张量均成立的关系中，识别未知系数的张量性质。

例：若对任意温度梯度 $\partial_j T$ ，热流 $q_i = -K_{ij} \partial_j T$ 都按矢量变换，则 K_{ij} 必为二阶张量。

证明要点

→ 设 $v_i = A_{ij} u_j$ 对任意矢量 u_j 成立，且 u 、 v 均为矢量

→ 新坐标系中 $v'_i = Q_{im} v_m = Q_{im} A_{mn} u_n$

→ 又 $u_n = Q_{jn} u'_j$ ，故 $v'_i = Q_{im} A_{mn} Q_{jn} u'_j$

→ 另一方面 $v'_i = A'_{ij} u'_j$ ，因 u'_j 任意

→ 得 $A'_{ij} = Q_{im} Q_{jn} A_{mn}$ ，即二阶张量变换法则

关键条件："对任意输入张量成立"。仅在某个特定矢量上成立不足以证明系数是张量。

概念辨析：张量性与各向同性

3.2

张量性

- 分量服从对应阶次的变换法则
- 在不同坐标系中表示同一几何实体
- 是张量的基本定义要求
- 一般张量旋转后分量会改变

各向同性

- 变换后分量数组与原数组相同
- 对任意旋转都没有优先方向
- 是更强的对称性要求
- 材料各向同性 $\neq$ 场量各向同性

重要区分

一个材料具有各向同性，是指其本构响应不因材料方向改变而改变，而不是说应力、应变等任意场量都必须都是各向同性张量。

各阶各向同性张量

各向同性张量要求：任意旋转后 $T' = T$ 。各阶情形如下：

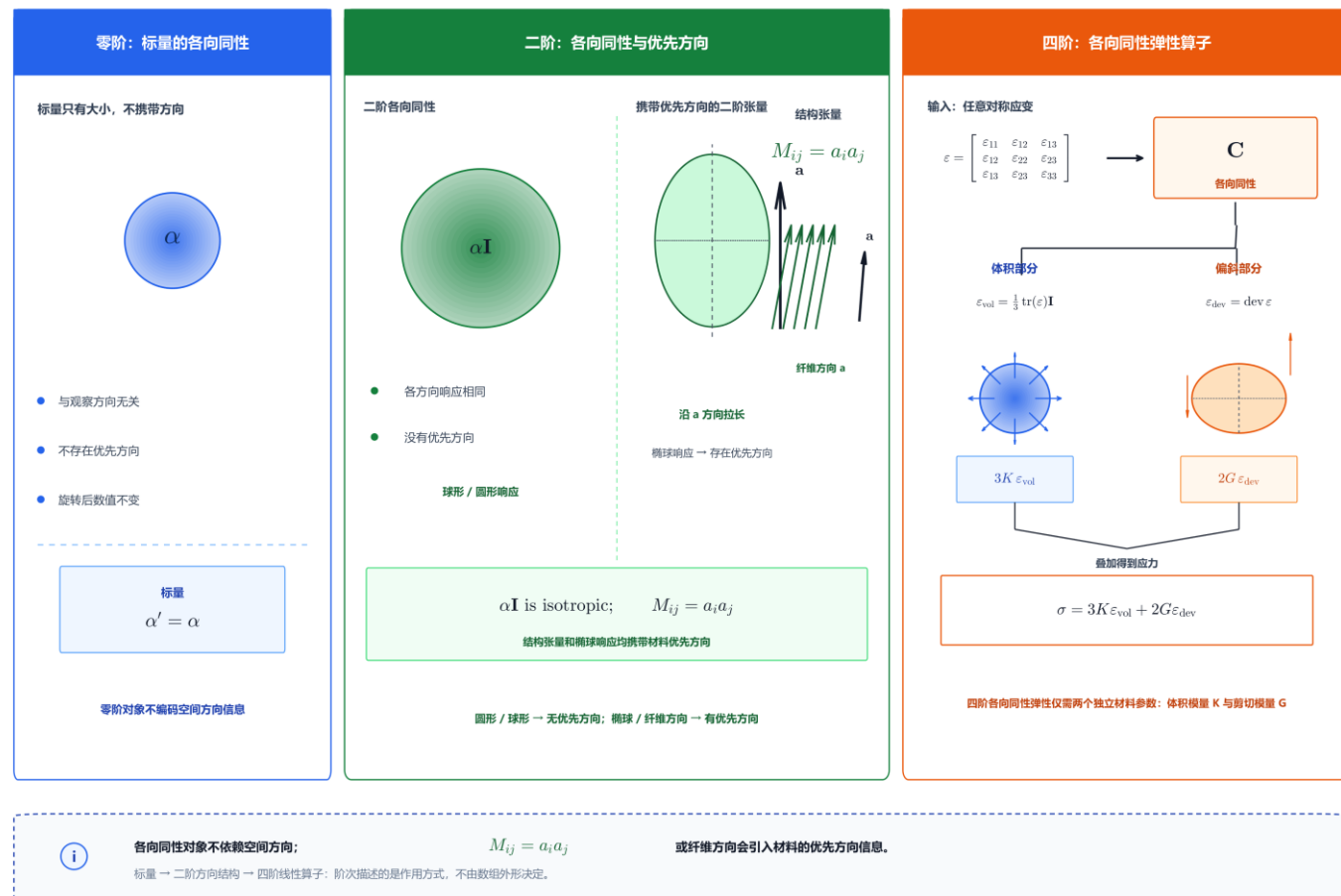
零阶	任意标量天然各向同性
一阶	唯一的一阶各向同性张量是零矢量（非零矢量携带方向）
二阶	$A_{ij} = a\delta_{ij}$ ，即 aI （静水应力是典型例子）
三阶	$A_{ijk} = a\epsilon_{ijk}$ （纯旋转下；镜像下为伪张量）
四阶	$C_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}$

各向同性与结构方向对比

3.2

各向同性对象与结构方向的对比示意

从标量到二阶张量,再到四阶各向同性弹性算子:方向信息与作用层级逐步增加



标量无方向；二阶各向同性张量 α 对所有方向响应相同；结构张量 $M_{ij} = a_i a_j$ 携带优先方向

工程例题 3-2：材料坐标系中的平面应力

3.2

层合板全局平面应力 σ ，局部材料轴 x'_1 相对全局轴 x_1 顺时针偏转 15° 。求局部应力分量。

已知应力

$$\sigma = \begin{bmatrix} 200 & 50 \\ 50 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

取 $\theta = -15^\circ$ ，构造 Q

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9659 & -0.2588 \\ 0.2588 & 0.9659 \end{bmatrix}$$

计算结果 $\sigma' = Q\sigma Q^T$

$$\sigma' \approx \begin{bmatrix} 161.60 & 93.30 \\ 93.30 & 38.40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

迹不变验证：

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma') &= 161.60 + 38.40 \\ &= 200.00 = \text{tr}(\sigma) \end{aligned}$$

平面应力解析变换：双角公式

3.2

展开 $\sigma' = Q\sigma Q^T$ 得到双角公式。双角 2θ 来源于两个方向余弦因子的乘积。

$$\sigma'_{11} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \tau_{12} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_{22} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta - \tau_{12} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{12} = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \tau_{12} \cos 2\theta$$

注意：双角 2θ 不表示额外发生了一次几何旋转，而是二阶张量变换中 $\cos\theta \cdot \cos\theta$ 等乘积的自然结果。

主方向与主应力

3.2

主坐标系中剪应力为零，令 $\tau'_{12} = 0$ 可得主方向：

主方向角

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$$

数值计算优先用 $\text{atan2}(2\tau_{12}, \sigma_{11} - \sigma_{22})$ 以正确判断象限

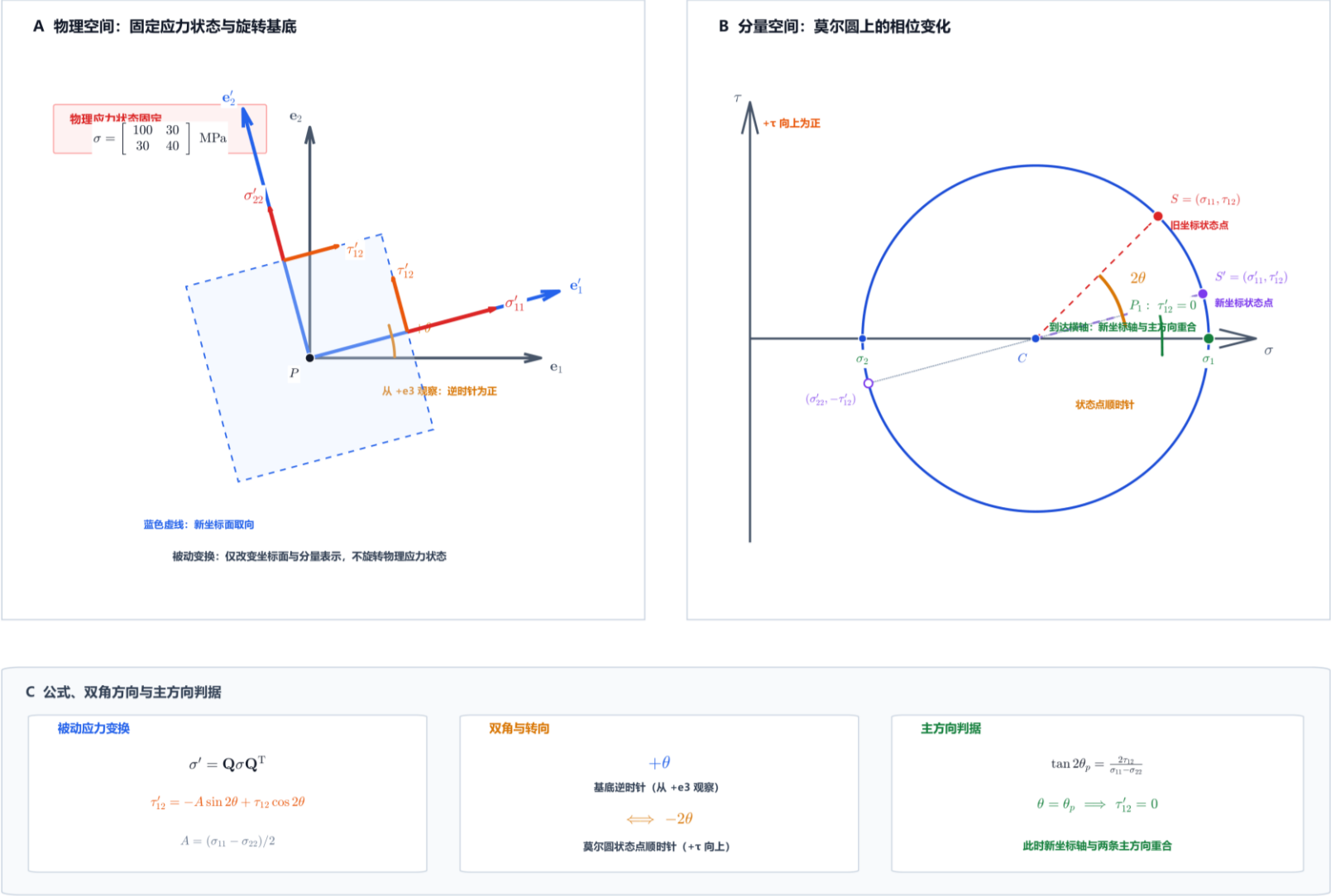
面内主应力

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \tau_{12}^2}$$

使旋转后剪应力为零的坐标方向，正是应力张量的特征向量方向。两个主方向相互正交，相差 90° 。

平面应力与莫尔圆

3.2



思考与讨论

1. 物理空间中基底逆时针旋转 θ ，莫尔圆上的状态点应顺时针还是逆时针转动？
2. 当状态点到达横轴 ($\tau'=0$) 时，新坐标轴与什么方向重合？
3. 莫尔圆上两个交点 $(\sigma_1, 0)$ 和 $(\sigma_2, 0)$ 之间的圆心角是多少？对应物理空间多少度？

提示

回顾二阶张量变换包含两个方向余弦因子 $Q_{ik} Q_{jl}$ ，因此角度关系为 2θ 。莫尔圆的几何是这一代数事实的可视化。

数字赋能 03-B：二阶与平面应力变换验证

3.2

用三种路径计算同一平面应力变换：矩阵乘法、einsum指标缩并、解析公式，验证一致性。

```
# 路径一：矩阵变换
sigma_prime_matrix = Q @ sigma @ Q.T
# 路径二：指标缩并
sigma_prime_einsum = np.einsum('ik,jl,kl->ij', Q, Q, sigma)
# 路径三：解析公式（双角公式）
sigma11_p = 0.5*(s11+s22) + 0.5*(s11-s22)*np.cos(2*theta) + tau*np.sin(2*theta)
# 验证不变量
print("trace invariant:", np.allclose(np.trace(sigma), np.trace(sigma_prime)))
print("det invariant:", np.allclose(np.linalg.det(sigma), np.linalg.det(sigma_prime)))
# 主方向
theta_p = 0.5 * np.arctan2(2*tau, s11-s22)
```

三条路径结果一致；迹和行列式在旋转下不变；einsum字符串可直接推广到四阶张量

模块三

张量构造、缩并与双点积

Tensor Construction, Contraction and Double Dot Product

核心问题：如何从矢量构造张量？缩并和双点积如何服务于力学计算？

由两个矢量构造二阶张量

两个矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 可以构造二阶张量 $\mathbf{T}$ ，其分量定义为：

$$T_{ij} = u_i v_j, \quad \mathbf{T} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$$

线性映射意义

$$\mathbf{T} \mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})$$

先把 $\mathbf{a}$ 投影到 $\mathbf{v}$ 方向上，
再沿 $\mathbf{u}$ 方向输出矢量。

一般 $\mathbf{u} \mathbf{v}^T \neq \mathbf{v} \mathbf{u}^T$

确为二阶张量

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= u'_i v'_j \\ &= Q_{ik} u_k \cdot Q_{jl} v_l \\ &= Q_{ik} Q_{jl} (u_k v_l) \\ &= Q_{ik} Q_{jl} T_{kl} \checkmark \end{aligned}$$

结构张量 $M_{ij} = a_i a_j$ 是这种构造的特例 ($\mathbf{u}=\mathbf{v}=\mathbf{a}$)，用于描述纤维方向等各向异性结构。

投影算子：法向与切向

3.3

设 $\mathbf{n}$ 为单位矢量，可构造两个互补的正交投影算子：

法向投影算子 $\mathbf{P}_n$

$$(\mathbf{P}_n)_{ij} = n_i n_j, \quad \mathbf{P}_n = \mathbf{n} \mathbf{n}^\top$$

$\mathbf{P}_n \mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})$ ，给出 $\mathbf{a}$ 沿 $\mathbf{n}$ 方向的投影

切向投影算子 $\mathbf{P}_t$

$$(\mathbf{P}_t)_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j, \quad \mathbf{P}_t = \mathbf{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^\top$$

$\mathbf{P}_t \mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{P}_n \mathbf{a}$ ，保留切平面内的部分

矢量分解

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_n \mathbf{a} + \mathbf{P}_t \mathbf{a}$$

投影算子性质

$$\mathbf{P}_n^2 = \mathbf{P}_n, \quad \mathbf{P}_t^2 = \mathbf{P}_t, \quad \mathbf{P}_n \mathbf{P}_t = 0$$

法向与切向投影算子的几何意义

同一单位法向 $\mathbf{n}$ 决定两个互补子空间：沿 $\mathbf{n}$ 的法向分量与位于切平面内的切向分量



任意矢量 $\mathbf{a}$ 分解为法向分量 $P_n \mathbf{a}$ 和切向分量 $P_t \mathbf{a}$ ；对面力 $\mathbf{t}$ 同样适用

概念辨析：左缩并、右缩并与转置

3.3

对二阶张量 T 和矢量 u ，缩并的位置不同结果不同：

右缩并 $T \cdot u$

$$T_{ij} u_j e_i = T u$$

用 T 的第二指标与 u 缩并

左缩并 $u \cdot T$

$$u_i T_{ij} e_j = T^T u$$

用 T 的第一指标与 u 缩并

普遍关系

$$T \cdot u = u \cdot T^T$$

对任意二阶张量成立，不要求 T 对称

本书优先使用指标式或矩阵乘法，以避免点号位置造成歧义。

缩并：对一对指标求和，阶次降2

- $T_{ii} = \text{tr}(\mathbf{T})$ — 同张量内缩并→标量
- $A_{ik} B_{kj}$ — 两张量间缩并→二阶
- C_{ijij} — 双重缩并→标量
- 每缩并一对指标，阶次降低二阶

双点积 (Frobenius内积)

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$$

性质：

$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A}$ (交换性)

$\mathbf{A} : \mathbf{A} = \|\mathbf{A}\|_F^2 \geq 0$ (范数)

约定提醒

本书统一采用 $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$ 。对非对称张量， $A_{ij} B_{ij}$ 与 $A_{ij} B_{ji}$ 不能混用。

物理映射：应力功与剪应变约定

单位参考体积上的应力功率或功增量：

$$\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

线性弹性应变能密度

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

从零载荷比例加载

剪应变约定（关键！）

$$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

ε_{12} 是张量剪应变， γ_{12} 是工程剪应变

易错点

把对称应力和应变的六个独立分量排列成工程向量时，必须明确剪切位置存放的是张量剪应变 ε_{ij} 还是工程剪应变 γ_{ij} ，并相应调整系数 2，不能直接混用。

工程例题 3-3：应变能密度的双点积计算

3.3

已知应力和小应变张量（非对角元为张量剪应变），计算 $\sigma:\epsilon$ 和应变能密度 W 。

应力张量 (MPa)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 200 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

应变张量

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1500 & 800 & 0 \\ 800 & -400 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

计算过程

法向项： $\sigma_{11}\epsilon_{11} + \sigma_{22}\epsilon_{22} + \sigma_{33}\epsilon_{33} = (200 \times 1500 + 0 \times (-400) + (-20) \times 100) \times 10^{-6} = 0.298 \text{ MPa}$

剪切项（因对称性出现两次）： $2(\sigma_{12}\epsilon_{12} + \sigma_{21}\epsilon_{21}) = 2 \times 50 \times 800 \times 10^{-6} \text{ MPa} = 0.080 \text{ MPa}$

$\sigma:\epsilon = 0.298 + 0.080 = 0.378 \text{ MPa}$, $W = \frac{1}{2} \times 0.378 = 0.189 \text{ MJ/m}^3$

数字赋能 03-C：张量构造与双点积

3.3

```
import numpy as np
u = np.array([2.0, -1.0, 3.0])
v = np.array([0.5, 4.0, 1.0])
# 两种方式构造 T_ij = u_i v_j
T1 = np.outer(u, v)
T2 = np.einsum('i,j->ij', u, v)
print("outer consistent:", np.allclose(T1, T2))
# 双点积计算应变能
sigma = np.array([[200,50,0],[50,0,0],[0,0,-20]])
epsilon = np.array([[1500,800,0],[800,-400,0],[0,0,100]]) * 1e-6
double_dot = np.einsum('ij,ij->', sigma, epsilon)
print("sigma:epsilon =", double_dot, "MPa")
print("W =", 0.5 * double_dot, "MJ/m^3")
```

输出：outer consistent: True | $\sigma:\epsilon = 0.378$ MPa | $W = 0.189$ MJ/m³ — 与手算结果一致

模块四

二阶张量的对称—反对称分解

Symmetric-Antisymmetric Decomposition

核心问题：任意二阶张量如何唯一分解？反对称部分与轴矢量有何对应？

对称张量与反对称张量

3.4

对称张量 S

$$S_{ij} = S_{ji}$$

- 三维有 6 个独立分量
- 应力、应变等力学量通常对称
- 可正交对角化（谱定理）

反对称张量 W

$$W_{ij} = -W_{ji}$$

- 对角分量为零
- 三维有 3 个独立分量
- 与轴矢量一一对应

力学应用：速度梯度分解

速度梯度 $L = \partial v_i / \partial x_j$ 可分解为 $L = D + W$ ，其中 D 为应变率张量（对称）， W 为旋率张量（反对称）。
 D 描述变形速率， W 描述刚体旋转速率。

唯一分解与正交性

任意二阶张量 $\mathbf{T}$ 可唯一分解为对称部分 $\mathbf{S}$ 和反对称部分 $\mathbf{W}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{W}$$

对称部分

$$S_{ij} = T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$$

反对称部分

$$W_{ij} = T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

Frobenius 内积下的正交性

$$\mathbf{S} : \mathbf{W} = 0 \quad \|\mathbf{T}\|_F^2 = \|\mathbf{S}\|_F^2 + \|\mathbf{W}\|_F^2$$

对称部分和反对称部分是"互补正交"的，范数满足勾股定理形式的分解。

课堂练习：对称—反对称分解

3.4

给定矩阵（5分钟练习）

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

请依次完成：

1. 计算 $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)$ 和 $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)$
2. 验证 $\mathbf{S} + \mathbf{W} = \mathbf{T}$
3. 计算 $\mathbf{S}:\mathbf{W}$
4. 核对 $\|\mathbf{T}\|_F^2 = \|\mathbf{S}\|_F^2 + \|\mathbf{W}\|_F^2$

自检结果（参考）

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}:\mathbf{W} = 2 \times 0 + 1 \times 2 + 1 \times (-2) + 4 \times 0 = 0 \checkmark$$

$$\|\mathbf{T}\|_F^2 = 4 + 9 + 1 + 16 = 30, \|\mathbf{S}\|_F^2 = 4 + 1 + 1 + 16 = 22, \|\mathbf{W}\|_F^2 = 0 + 4 + 4 + 0 = 8$$

$$30 = 22 + 8 \checkmark$$

反对称张量与轴矢量

3.4

三维右手正交坐标系中，任意反对称张量 W 可与一个轴矢量 a 对应：

定义关系

$$W_{ij} = -\varepsilon_{ijk} a_k$$
$$a_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} W_{ij}$$

矩阵形式

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

核心性质

$$\mathbf{W}\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$$

反对称张量作用于矢量等价于轴矢量的叉乘

分量对应

$$a_1 = W_{32} = -W_{23}, \quad a_2 = W_{13} = -W_{31}, \quad a_3 = W_{21} = -W_{12}$$

概念辨析：轴矢量不是普通极矢量

3.4

极矢量（普通矢量）

- 在纯旋转下按 $v' = Qv$ 变换
- 在镜像反射下也按同样方式变换
- 例子：位置、速度、力、加速度
- 有明确的物理方向

轴矢量（伪矢量）

- 纯旋转下与极矢量变换形式相同
- 镜像反射下多一个行列式因子
- 例子：角速度、力矩、角动量
- 方向由右手定则定义

本书约定

在右手坐标系之间、且仅考虑保持取向的纯旋转时使用上述对应关系。涉及镜像变换时必须额外考虑空间取向，这与第二章 ϵ_{ijk} 的伪张量性质一致。

模块五

主值、主方向与谱分解

Principal Values, Directions and Spectral Decomposition

核心问题：如何找到使张量对角化的坐标系？特征向量矩阵与 Q 有何关系？

实对称张量的特征值问题

3.5

对柯西应力张量，若某截面的面力与法向共线：

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$$

λ 是主应力， $\mathbf{n}$ 是对应的主方向

特征方程

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

存在非零解 $\mathbf{n}$ 的条件

标准特征多项式

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

谱定理：实对称张量的性质

3.5

对于实对称二阶张量，谱定理保证：

1

三个特征值均为实数

主应力、主应变都是实数

2

不同特征值对应的特征向量相互正交

主方向构成正交基底

3

可选取一组正交归一特征向量构成主基底

存在使张量对角化的坐标系

4

张量可以被正交对角化

$\sigma' = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

若存在重复特征值，对应特征子空间内的主方向不唯一，但可选取任意一组正交归一基底。

特征向量矩阵与坐标变换矩阵

3.5

NumPy 等数值库返回的特征向量矩阵 V 按列排列特征向量，与本书 Q 的行列约定不同：

特征向量矩阵 V

- 列向量是主方向
- $V = [v^{(1)} \ v^{(2)} \ v^{(3)}]$
- $V^T \sigma V = \Lambda$ (对角化)

方向余弦矩阵 Q

- 行向量是新基底
- 新基底取为主方向时
- 必须令 $Q = V^T$

关键关系

$$Q = V^T$$

$$\sigma' \stackrel{\Rightarrow}{=} Q \sigma Q^T = \Lambda$$

主坐标系中应力张量变为对角矩阵，对角元即为主应力

谱表示（谱分解）

3.5

实对称张量可表示为三个主方向投影算子的加权和：

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha} n_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)}$$

加权投影算子之和

物理意义与工程用途

- 每个主方向 $n^{(\alpha)}$ 构造一个投影算子 $P^{(\alpha)} = n^{(\alpha)} n^{(\alpha)T}$
- 张量 = 主值 $\times$ 对应投影算子的求和
- 可用于本构关系中各向异性张量函数的表示
- 谱分解是主值、主方向、投影算子三者的统一表达

工程例题 3-4：主值、主方向与谱重构

3.5

已知应力张量，求主值、主方向，构造 V 和 $Q=V^T$ ，验证对角化，用谱分解重构。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

特征值

$$\sigma_1 = 50 \text{ MPa}, \sigma_2 = 30 \text{ MPa}, \sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

$\sigma_1=50$ 对应的主方向

$$\mathbf{n}^{(1)} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right)^T$$

对角化验证

$$Q\sigma Q^T = \text{diag}(50, 30, 0) \text{ MPa}$$

$Q = V^T$, V 按列存放特征向量

谱分解重构

$$\sigma = 50 \cdot \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)T} + 30 \cdot \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)T} + 0 \cdot \mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)T} = \text{原矩阵} \checkmark$$

模块六

二阶张量的主不变量

Principal Invariants of Second-Order Tensors

核心问题：在坐标变换中保持不变的标量有哪些？它们有何物理意义？

主不变量的代数定义

3.6

特征多项式 $\det(\lambda I - T) = \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3$ 的系数即为主不变量：

$$I_1 = \text{tr } \mathbf{T} = T_{ii} \quad \text{一阶主子式之和（迹）}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2) \right] = \frac{1}{2} (T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \quad \text{二阶主子式}$$

$$I_3 = \det \mathbf{T} \quad \text{三阶主子式（行列式），衡量线性映射是否可逆}$$

在正交变换 $T' = Q^T T Q$ 下， T' 与 T 相似，因此具有相同的特征多项式和三个主不变量。

不变量的特征值形式

3.6

若 T 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，则三个不变量是特征值的基本对称多项式：

第一不变量

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

特征值之和

第二不变量

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

两两乘积之和

第三不变量

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

特征值之积

物理意义（以应力为例）

- $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_m$ ，与平均正应力（静水压力）相关
- I_2 与偏应力强度有关，但全应力的 I_2 不是通用畸变能度量
- $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ ， $I_3=0$ 表示至少一个主应力为零
- 三个不变量完全由张量的谱确定，与坐标系选择无关

主子式形式与列维-奇维塔表达

3.6

三个不变量可按主子式阶次统一理解： I_1 =一阶主子式和， I_2 =二阶主子式和， I_3 =三阶主子式。

I_2 的主子式展开

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{33} & T_{31} \\ T_{13} & T_{11} \end{vmatrix}$$

I_3 的 ε - δ 表达

$$I_3 = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} T_{ip} T_{jq} T_{kr}$$

与第二章 ε - δ 代数衔接

主子式选取规则

二阶主子式的行、列必须选取相同的指标集合，如 {1,2}、{1,3}、{2,3}，不能交叉选取。

三个主不变量：主子式层级与特征值表达式

从一阶到三阶：行、列必须使用相同指标集合，所得系数也是特征值的基本对称多项式



概念辨析：不变量的代数定义与物理解释

3.6

I_1 的物理意义

对小应变 ϵ ， $\text{tr}(\epsilon)$ 是体积应变；对应力 σ ， I_1 是平均正应力的3倍，不直接等于体积变化（需本构关系）

I_2 的物理意义

全应力的 I_2 不是通用畸变能度量。塑性理论使用偏应力的第二不变量 J_2 ，而非全应力 I_2

$I_3=0$ 的含义

只说明张量奇异。对对称应力张量表示至少一个主应力为零，但不自动说明是平面应力坐标系

核心原则：代数定义适用于任意二阶张量，物理意义取决于张量类型和具体模型，不能简单套用。

应用预览：应力的球—偏分解

3.6

应力张量可分解为球形部分（各向同性）和偏部分（方向差异）：

平均正应力

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} I_1$$

球—偏分解

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{I} + \mathbf{s}$$

偏应力张量

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I}$$

$\text{tr}(\mathbf{s}) = 0$ ，扣除各向同性部分后的方向差异

球形部分 $\sigma_m \mathbf{I}$

- 各方向相同的正应力
- 主要与体积改变有关
- 静水压力 $p = -\sigma_m$

偏部分 $\mathbf{s}$

- 方向差异引起的应力
- 主要与形状改变有关
- 是塑性屈服的关键因素

J_2 与 von Mises 等效应力

3.6

偏应力的第二不变量 J_2 衡量偏应力强度，是塑性力学的核心标量：

偏应力第二不变量

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$$

von Mises 等效应力

$$\sigma_{\text{vm}} = \sqrt{3J_2}$$

主应力形式

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

工程意义

- σ_{vm} 把多轴应力状态换算为具有相同偏应力强度的单轴应力标量
- 对延性金属，可将 σ_{vm} 与材料屈服强度比较，判断是否进入塑性
- 静水压力部分不影响 von Mises 应力（纯体积变化不导致屈服）
- 本节仅建立联系，具体屈服模型和安全系数属于后续课程内容

第三不变量与奇异性

3.6

$I_3 = \det(T)$ 衡量线性映射是否可逆:

$$I_3 \neq 0$$

T 可逆
线性映射是一一对应的
所有主应力非零

$$I_3 = 0$$

存在非零 n 使 $Tn = 0$
对对称应力: 至少一个主应力为零
线性映射不可逆

易错提醒

$I_3=0$ 只说明某个主应力为零, 但并不自动说明原坐标系就是薄板意义上的"平面应力坐标系"。
是否可采用平面应力模型, 还需要结合几何、边界条件和厚度方向假设综合判断。

数字赋能 03-D：主方向矩阵与不变量校核

3.6

```
# 求主值和主方向（对称张量用eigh）
evals, V = np.linalg.eigh(sigma)
# 按降序重排（eigh默认升序）
order = np.argsort(evals)[::-1]
evals, V = evals[order], V[:, order]
# 本书Q的行是新基矢量 →  $Q = V^T$ 
Q_principal = V.T
sigma_principal = Q_principal @ sigma @ Q_principal.T
# 验证不变量
def invariants(T):
    I1 = np.trace(T)
    I2 = 0.5 * (I1**2 - np.trace(T @ T))
    I3 = np.linalg.det(T)
    return np.array([I1, I2, I3])
# 任意旋转后不变量应相同
sigma_prime = Q @ sigma @ Q.T
print("invariant check:",
      np.allclose(invariants(sigma), invariants(sigma_prime)))
```

要点：eigh返回升序特征值+列向量V； $Q=V^T$ ；约 10^{-14} 量级非对角元是浮点舍入误差

形成性评价（一）：概念判断

判断下列说法是否正确，并说明理由

1. 坐标系旋转后，改变的是物理量本身，而不是它的分量表示。
2. 若 NumPy 返回特征向量矩阵 V ，则主坐标变换矩阵 $Q = V$ 。
3. 应力张量的第一不变量 I_1 直接等于体积应变。
4. 反对称张量 W 作用于矢量 r 等价于其轴矢量 a 与 r 的叉乘。

评价目的

检查是否建立“物理量不变—分量变化”的核心认识，是否掌握 $Q=V^T$ 的行列约定，是否理解不变量的物理意义有条件性，是否掌握反对称张量与轴矢量的对应。

常见错误：第2题最易错（ $Q=V$ 而非 V^T ）；第3题反映学生混淆代数定义和物理解释。

形成性评价（二）：计算与推导

计算与推导题

给定平面应力 $\sigma = [[80, 30], [30, -20]]$ MPa:

- (1) 用 $\sigma' = Q\sigma Q^T$ 计算 $\theta=30^\circ$ 旋转后的应力分量;
- (2) 求主方向角 θ_p 和两个主应力;
- (3) 验证旋转前后迹和行列式不变。

评价目的

检查能否综合运用矩阵变换、双角公式和不变量概念。参考答案: $\sigma'_{11} \approx 85.98$, $\sigma'_{22} \approx -25.98$, $\tau'_{12} \approx 12.68$ MPa; $\theta_p \approx 15.5^\circ$; 主应力 ≈ 84.2 和 -24.2 MPa。

常见错误: θ 符号搞反、主方向公式用 $\tan$ 不用 atan2 、忘记验证不变量。

本章核心概念回顾

方向余弦矩阵

$Q_{ij} = e'_i \cdot e_j$ ，行是新基在旧基中的分量

张量性与各向同性

张量性=服从变换法则；各向同性=变换后分量不变

对称—反对称分解

$T=S+W$ ， $S:W=0$ ， W 与轴矢量对应

主不变量

$I_1=\text{tr}(T)$, I_2, I_3 ，坐标变换下保持不变

被动坐标变换

物理量不变，基底旋转； $v' = Qv$ ， $T' = QTQT$

投影算子

$P_n = nn^T$ （法向）， $P_t = I - nn^T$ （切向）

谱分解

实对称张量可正交对角化， $\sigma = \Sigma \sigma_\alpha n^{(\alpha)} n^{(\alpha)T}$

球—偏分解

$\sigma = \sigma_m I + s$ ， J_2 衡量偏应力强度， $\sigma_{vm} = \sqrt{3J_2}$

关键公式回顾

矢量变换	$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}\mathbf{v}$	分量随基底旋转的变换法则
二阶张量变换	$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^\top$	正交相似变换， $\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^\top$
主坐标变换	$\mathbf{Q} = \mathbf{V}^\top$	特征向量矩阵 $\mathbf{V}$ 与 $\mathbf{Q}$ 的关系
第一不变量	$I_1 = \text{tr } \mathbf{T} = T_{ii}$	迹，特征值之和
偏应力第二不变量	$J_2 = \frac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$	偏应力强度度量
von Mises应力	$\sigma_{\text{vm}} = \sqrt{3J_2}$	多轴应力等效单轴标量

物理图像回顾

被动坐标变换：基底旋转，物理矢量不动，分量随之改变
从 $\{e_1, e_2\}$ 到 $\{e'_1, e'_2\}$ 的变换，坐标轴在动，物理矢量不动

基底与分量关系

基底变换： $e'_i = Q_{ij} e_j$

分量变换： $v'_i = Q_{ij} v_j$

物理量不变： $v = v'_i e'_i = v_j e_j$

被动变换

物理矢量不动，基底旋转

平面应力的被动坐标变换、双角关系与主方向
物理应力张量 σ 在基底变换下，其分量按二阶张量规则变换。主方向 e_1, e_2 满足 $\sigma_{12} = 0$ 。

A 物理应力张量与基底变换

B 分量变换：莫尔圆上的几何变化

C 结论：莫尔圆与主方向

莫尔圆

物理 $\theta \rightarrow$ 应力空间 2θ

法向与切向投影算子的几何意义
任一单位向量 n ，其法向投影算子 $P_n = n n^T$ ，切向投影算子 $Q_n = I - P_n$ 。

A 任意向量投影 / 切向分解

B 应力张量的法向 / 切向分解

C 投影算子：应力张量与投影算子

投影算子

法向/切向正交分解

三个主不变量：主子式层级与特征值表达式
任一实对称张量 A ，其三个主不变量 I_1, I_2, I_3 是标量不变量。

A 任意张量 A 的主不变量

B 主子式层级与特征值表达式

C 结论：三个主不变量与特征值

不变量

主子式层级结构

贯穿全章的物理图像

坐标系旋转不改变物理实体，只改变分量表示；从变化的分量中提取不变的主值、主方向和标量不变量。

能力目标与易错点回顾

学完本章你应该能

- ✓ 构造方向余弦矩阵并验证正交性
- ✓ 完成矢量和二阶张量的坐标变换
- ✓ 由平面应力解析变换求主方向
- ✓ 求解实对称张量的主值和主方向
- ✓ 计算并检验三个主不变量
- ✓ 完成对称—反对称分解
- ✓ 用投影算子分解面力
- ✓ 用双点积计算应变能密度

最容易混淆的问题

- ⚠ 被动变换 vs 主动旋转（矩阵互逆）
- ⚠ $Q=V^T$ vs $Q=V$ （行列约定）
- ⚠ 双角 2θ 的来源（非二次旋转）
- ⚠ 张量剪应变 ε vs 工程剪应变 γ （因子2）
- ⚠ 全应力 I_2 vs 偏应力 J_2 （畸变能）
- ⚠ I_1 =体积应变？（需本构关系）
- ⚠ $I_3=0$ =平面应力？（需几何判断）
- ⚠ 左缩并 vs 右缩并（转置关系）

课后任务与下章衔接

课后任务

- 基础：完成习题 3.1—3.4（概念辨析与变换法则推导）
- 计算：完成习题 3.10—3.12（层合板应力变换、球偏分解、主应力）
- 编程：完成习题 3.14—3.15（随机旋转下不变量校核、行列约定验证）
- 拓展：思考习题 3.16（张量不变量与机器学习特征的关系）
- 预习：阅读第4章"曲线坐标与张量分析"，思考为什么需要曲线坐标

下章衔接

本章在笛卡尔正交坐标系中建立了张量变换法则。下一章将推广到一般曲线坐标系，引入协变/逆变分量、克里斯托费尔符号和协变导数。

本章的正交变换 Q 和不变量概念，将在曲线坐标中以更一般的形式重现。

谢谢

张量分析服务于连续介质力学

徐翱 景泽 编著

西北工业大学 极端力学研究院